ENSET B'' (TA) 1986

DURÉE : 3 heures

L'épreuve est constituée de trois problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. L'endomorphisme identité de E est noté I et on note u l'endomorphisme qui associe à l'élément (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ l'élément : $(x - y + 2z - 2t, z - t, x - y + z, x - y + z)$.

1° Pour tout réel λ on pose :

$$v_\lambda = u - \lambda I$$

Montrer que v_λ est une bijection de E sauf pour deux valeurs λ_1 et λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ que l'on précisera. Que peut-on dire de ces deux nombres λ_1 et λ_2 relativement à u ?

2° On note E_1 et E_2 les sous-espaces propres de u. Déterminer chaque sous-espace propre par une base. u est-il diagonalisable ?

3° On note F_1 et F_2 les deux espaces, noyaux respectifs de $v_0^2 = v_0 \circ v_0$ et de $v_1^2 = v_1 \circ v_1$ (le signe $\circ$ étant celui de la composition). Montrer successivement :

a. F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (on pourra déterminer des bases de F_1 et F_2);

b. $E_1 \subset F_1$ et $E_2 \subset F_2$;

c. Montrer que F_1 et F_2 sont invariants par u : c'est-à-dire $u(F_1) \subset F_1$, $u(F_2) \subset F_2$.

4° En utilisant les résultats précédents, trouver une base de E relativement à laquelle la matrice de u prend la forme triangulaire.

DEUXIÈME PROBLÈME

On définit deux suites (u_n) et (v_n) de fonctions réelles de la variable réelle x sur $[0, \pi]$ au moyen des formules :

$$u_n(x) = \int_0^{nx} \frac{\sin^2 t}{n^2 \sin^2 \frac{t}{n}}\, dt$$

$$v_n(x) = \int_0^{nx} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt \qquad (n \text{ entier} > 0)$$

1° Montrer que $u_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in [0, \pi]$. Montrer également la même propriété pour $v_n(x)$ et que la limite de $v_n(x)$ existe lorsque n tend vers $+\infty$ (x étant fixé).

2° Soient 2 réels fixés x et x' vérifiant :

$$x \in]0, \pi[\ , \qquad x' \in]0, \pi[$$

Montrer que $\lim_{n \to \infty} [u_n(x) - u_n(x')] = 0$

(On pourra utiliser, par exemple, une minoration de $\sin^2 u$ lorsque u appartient à un segment fermé inclus dans $]0, \pi[$.)

3° On pose $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sin^2 u} - \dfrac{1}{u^2}$.

a. Montrer que φ est positive, continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $\lim_{u \to 0+} \varphi(u)$ existe. En déduire que φ est bornée sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. En utilisant la différence $u_n(x_0) - v_n(x_0)$, pour x_0 fixé, choisi convenablement, montrer que :

$$\forall x \in]0, \pi[\qquad \lim_{n \to \infty} u_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt.$$

Tournez la page S. V. P.

page 62 1986 E.n.s.e.t. Section M', (1'). Mathématiques

4° *a.* Établir, pour $u \in]o, \pi[$ et pour n entier $\geqslant 1$, la formule :

$$\frac{\sin^2 nu}{\sin u} = \sum_{p=1}^{p=n} \sin [(2p-1)u]$$

(on pourra utiliser, par exemple, la partie imaginaire d'une somme d'exponentielles).

b. Montrer que les intégrales I_p définies par

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin [(2p-1)t]}{\sin t} dt,$$

ne dépendent pas de l'entier $p \geqslant 1$.

c. Déduire, de ce qui précède, la valeur de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 (nu)}{\sin^2 u} du.$$

5° Calculer :

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

En déduire l'existence et la valeur numérique de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

TROISIÈME PROBLÈME

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. On désigne par U l'application qui, à tout élément f de E, fait correspondre la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt & \text{si } x > 0 \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

1° *a.* Montrer que si $f(0) = 0$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \right] = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

b. Montrer que U est un endomorphisme de E. (Pour l'étude de F au point $x = 0$, on pourra se reporter à la question *a.* en utilisant $f - f(0)$.)

c. Montrer que l'endomorphisme U est injectif.

2° *a.* Montrer la dérivabilité de $F = U(f)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression de la dérivée. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

b. Montrer par un exemple que F peut être non dérivable au point $x = 0$, à droite. Donner un exemple où F est dérivable au point $x = 0$.

c. On suppose dans cette question que f est dérivable à droite en $x = 0$; montrer que $F = U(f)$ est dérivable à droite en $x = 0$. Quelle est la valeur de $F'(0^+)$?

3° On suppose qu'il existe des valeurs propres pour l'endomorphisme U. Soit λ une telle valeur propre et f une fonction propre associée. Montrer que sur $]0, +\infty[$, f est solution d'une équation différentielle simple que l'on intégrera. En déduire qu'il existe effectivement des valeurs propres. Déterminer l'ensemble de toutes ces valeurs propres et les fonctions propres associées.

4° On considère $U^2 = U \circ U$ et on pose $G = U^2(f)$ pour $f \in E$. Montrer que $G(x)$ s'exprime pour $x > 0$ par une intégrale double étendue à un domaine simple de $\mathbb{R}^2$. En admettant qu'on puisse intervertir l'ordre des intégrations répétées dans cette intégrale double, montrer que pour $x > 0$, $G(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, g(x, t)\, dt.$$